Tema 1

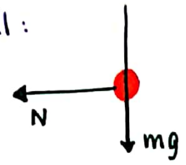
SISTEMAS INERCIALES

Derivadas Coordenadas Polares si $\theta = \theta(t)$:

$x = r \cdot \cos\theta \rightarrow \dot{x} = -r \,\mathrm{sen}\,\theta \,\dot{\theta} \rightarrow \ddot{x} = -r(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})$

$y = r \cdot \mathrm{sen}\,\theta \rightarrow \dot{y} = +r\cos\theta \,\dot{\theta} \rightarrow \ddot{y} = r(-\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta})$

Masa en eje vertical:

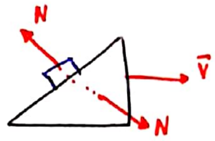


La normal es perpendicular al eje

Caso 2 masas conectadas por hilo con ángulo θ entre ejes (alambres):

Fuerzas de Reacción de los Alambres en función de θ $\equiv$ NORMALES EN FUNCIÓN DE θ

Plano Inclinado: El bloque también empuja al plano



El bloque ejerce sobre el plano una fuerza N de sentido contrario que hace que el plano se mueva

Caso Bola en copa: El cristal se romperá cuando la bola ejerza una fuerza normal $N = F$ tal que F sea la fuerza perpendicular que el cristal puede resistir.

$F = m\,a_n$ Aceleración Normal : $a_n = \frac{V^2}{R}$ (Fuerza centrípeta)

NO HAY ROZAMIENTO → CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Partícula libre → $\Sigma F = 0$ (1ª Ley Newton: Inercia) No actúa ninguna fuerza sobre ella

Gota en medio húmedo (ρ uniforme) → $m(t)$ la masa va aumentando (creciente)

Gota esférica: $\frac{dm}{dt} = \alpha\, 4\pi \underbrace{R^2(t)}_{\text{Radio gota}}$ ← El aumento de la masa por unidad de tiempo es proporcional a la superficie de la gota

Aumenta con tiempo

$m(t) = \frac{4}{3}\rho\pi R^3(t)$

Escaneado con CamScanner

Velocidad Terminal. Velocidad máxima que puede alcanzar un objeto en caída libre

$\boxed{\ddot{y}=0}$ La aceleración por la gravedad va disminuyendo porque la Frozamiento AUMENTA CON LA VELOCIDAD ($F(v)$). Llegará un momento en el que la Frozamiento es igual a la gravedad y el objeto cae a v constante.

F(v) & F(t) generalmente NO CONSERVATIVAS → NO SE CONSERVA LA ENERGÍA ($E_0 \neq E_f$)

Hacer con 2ª Ley de Newton

(Lanzar bola hacia arriba: Plantear $\begin{cases}\text{subida}\\ \text{bajada}\end{cases}$)

CASOS LÍMITE: $\theta : (0, \pi/2, \pi)$

ctes $(m, ..) \rightarrow 0$

$V : (0, \infty)$

COLISIONES

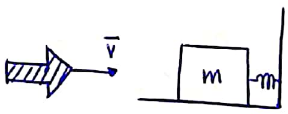
- Elástica: Las masas NO se unen; Se conserva E_c total, momento lineal
- Inelástica: Masas PEGADAS; NO se conserva E_c total; SÍ se conserva momento lineal

Fracción de E_c perdida en la colisión:

$$\frac{E_{c0} - E_{cf}}{E_{c0}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Caso:  separar por componentes x e y

Caso proyectil impacta en bloque con muelle:



E_p máxima ≡ **Muelle comprimido al máximo**

($E_p = 0$ ⇒ Muelle sin comprimir)

Fuerzas en 1D **SIEMPRE CONSERVATIVAS**

Determinar constante C_1 del potencial al integrar → Origen de potenciales $\begin{cases} V(x=0)=0 \\ V(x=\infty)=0 \\ \dots \end{cases}$

Escaneado con CamScanner

POTENCIAL

El análisis de la energía mecánica es especialmente útil en el caso de movimientos unidimensionales.

Si tenemos una partícula cuyo movimiento se produce a lo largo de un eje OX, sometida a una fuerza dependiente solo de la coordenada x:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\hat{i} \quad ; \quad \vec{F} = f(x)\hat{i}$$

Para una fuerza de este tipo **siempre** existe una energía potencial dada por su integral respecto a x:

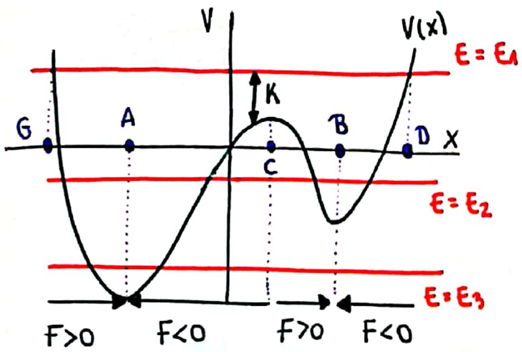
$$\boxed{V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\cdot dx} \quad ; \quad \boxed{F(x) = \frac{-dV}{dx}}$$

Por ser una fuerza conservativa

De esta forma, la ley de la Conservación de la Energía se escribe:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{CONSTANTE}}$$

Si trazamos una gráfica de la Energía Potencial como función de la posición x (V(x)), podemos establecer varias propiedades del movimiento:



- Puntos de Equilibrio: Máximos & Mínimos — A, B & C (F = 0)
    - Equilibrio ESTABLE: MÍNIMOS (A & B)
    - Equilibrio INESTABLE: MÁXIMOS (C)
- La diferencia entre la recta **E** y la curva V(x) en el mismo punto es el valor de la Ecinética (K)

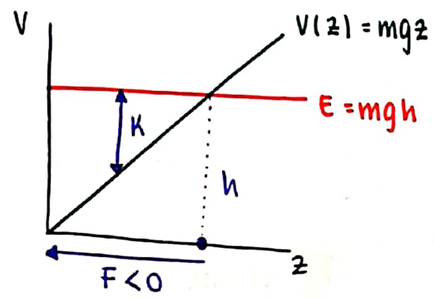
  Siempre ⊕. Movimiento acotado entre los puntos donde la recta **E** corta a V(x)

Escaneado con CamScanner

- Puntos donde E_1 corta a $V(x)$ → Energía Cinética NULA $(E = V(x))$
(D & G)
Partícula en reposo instantáneo
La velocidad cambia de signo
PUNTOS DE RETORNO

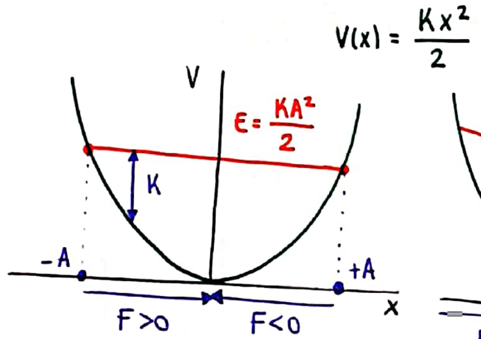
- $E = E_2$: La partícula solo puede oscilar { en torno a A ó en torno a B
NO EN TORNO A C $(E \leq V(x))$
Imposible

Ejemplos:

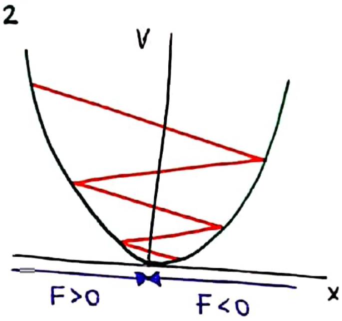


Caída Libre

(Movimiento limitado por el suelo)



Oscilador Armónico



Oscilador Armónico con Rozamiento

Hay Froz. no conservativa
La E nos se conserva, disminuye hasta pararse en punto de equilibrio estable

Esta gráfica NO representa una curva bidimensional. La bola no sube obaja. En la curva de potencial, la única coordenada es x. El eje de ordenadas representa la energía, no una distancia vertical.

Derivadas:

- $\arcsen x$: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arcsenh$: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\arccos x$: $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccosh$: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctg x$: $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\arctgh$: $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Escaneado con CamScanner

FRECUENCIA DE LAS PEQUEÑAS OSCILACIONES EN TORNO A UN PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE

Punto de Equilibrio Estable → Mínimo de potencial: $\frac{dV_{ef}(q_j)}{dq_j} = 0 \qquad q_0 = a$

$$\left.\frac{d^2 V_{ef}(q_j)}{dq_j^2}\right|_{q_0 = a} > 0 \rightarrow \text{a punto de equilibrio estable}$$

Para estudiar el movimiento en las cercanías de un punto de equilibrio estable q_0, haremos un desarrollo de Taylor en torno a q_0:

$$V_{ef}(q_j) \simeq V_{ef}(q_0) + \left.\frac{dV_{ef}}{dq_j}\right|_{q_0}(q_j - q_0) + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2 V_{ef}}{dq_j}\right|_{q_0}(q_j - q_0)^2 + \dots$$

De aquí vemos
- Término Orden 0: Constante (irrelevante)
- Término Orden 1: Se anula (al ser mínimo, la 1ª derivada es nula)
- Término Orden 2: 1er término relevante

Entonces: en las cercanías de q_0 (punto de equilibrio estable), el primer término relevante es la parte cuadrática del potencial, y como q_0 es un mínimo, $V''(q_0)$ siempre será positiva

Por esto, vemos que: $\boxed{V \propto \frac{1}{2} K (q_j - q_0)}$ → $\boxed{K = \left.\frac{d^2 V_{ef}}{dq_j}\right|_{q_0} = \omega^2 m}$

De esta expresión extraemos la frecuencia de oscilación ω

Dentro de Vefectivo entran los términos de V y los términos de T que dependen de la coordenada no cíclica

(En $T \geq 0$ solo entran los términos que dependan de $\dot{x}, \dot{y}$ (derivadas temporales de posición)

Lo que sobra va a Vefectivo

Ejemplo: Enero 2013

$\underline{\underline{\theta = 0}} \rightarrow 1 - \cos\theta \simeq 0$; $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$; $\dot{\theta}^2 \simeq 0$

Péndulo Simple:

- Ec. Mov: $\ddot{\theta} = -\omega\theta$

ω pequeñas osc. en torno a $\theta = 0$ (equilibrio)

Escaneado con CamScanner

Sist. No Inerciales

$$m \cdot \vec{a}_r = F - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \underbrace{m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})))}_{\text{F. centrífuga}}$$

$$\underbrace{- 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)}_{\text{F. coriolis}} - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}))$$

$\vec{r}$: vector posición sist. rotante

Escaneado con CamScanner

Lagrange

Las fuerzas de ligadura (normales, tensiones...) NO aparecen de forma explícita.

Lagrangiano: $L = T - V$ $\begin{cases} \cdot\ T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ \cdot\ V = E \text{ potencial} \end{cases}$ Solo fuerzas Conservativas

Ecuaciones de Movimiento: Ecs. de Lagrange $\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

q_j: coordenadas generalizadas del sistema

Coordenadas Generalizadas:

Habrá tantas como grados de libertad tenga el sistema:

Grados de Libertad: $D \cdot n - K$

- D: dimensiones
- n: nº partículas
- K: nº ligaduras → Relaciones entre coordenadas generalizadas
  - Escleróminas. Independientes del tiempo
  - Reónomas. Dependientes del tiempo

- Hay tantas ecuaciones de Lagrange como grados de libertad (≡ coord. generalizadas)
- Serán ecuaciones diferenciales de orden 2.

- Condiciones Aplicabilidad
  - Ligaduras Holónomas (se expresan algebraicamente: Ej: $x^2 = y$)
  - Fuerzas externas Conservativas
  - Los potenciales son independientes de las velocidades generalizadas $(V \neq V(\dot{q}_j))$

Momentos Generalizados:

$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$ → Si $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ (su momento se conserva) q_i es Coordenada Cíclica

Escaneado con CamScanner

Conservación:

- Traslación Espacial en q_j & $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ Conservación Momento Lineal — en la dirección de traslación de q_j
- Rotación en q_j & $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ Conservación Momento Angular — En la dirección de rotación en torno a eje $L\,\hat{n}$

Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow$ Aparece cantidad conservada $\rightarrow$ $\boxed{H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j - L}$

Hamiltoniano del Sistema

Caso: $\boxed{H = E \text{ total del Sistema}}$ Si
- $V \neq V(\dot{q}_j)$ El potencial NO depende de las velocidades generalizadas
- $\vec{F}_i(q_j)$ NO dependen del tiempo
- Las ligaduras NO dependen del tiempo

Conservación de H & E:

- H se conserva $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$
  - $H = E$ E se conserva
  - $H \neq E$ E puede conservarse o NO
- H NO se conserva $\left(\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0\right)$
  - $H = E$ E NO se conserva
  - $H \neq E$ E puede conservarse o NO

* E se conservará si al hacer $\frac{dE}{dt} = 0$ obtenemos las ecuaciones de movimiento

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Identificar ligaduras y escoger coordenadas generalizadas
2. Calcular V y T en función de las coordenadas generalizadas
3. Calcular el Lagrangiano: $L = T - V$ & Determinar ecs. Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$
4. Calcular E & H y estudiar el movimiento siempre y cuando la cantidad se conserve
5. Representación gráfica a partir del potencial efectivo V_{ef}...

Escaneado con CamScanner

Osciladores

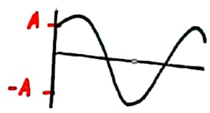
fuerzas en 1D

Teniendo una masa m sometida a $\begin{cases} \cdot \; F_{recuperadora} = -Kx \text{ (Ley de Hooke)} \\ \cdot \; F_{rozamiento} = -bv = -b \cdot \frac{dx}{dt} \\ \cdot \; F_{arbitraria} : F(t) \text{ dependiente del tiempo} \end{cases}$ y

aplicando la **2ª Ley de Newton**: $\boxed{m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F(t)}$

- $b = 0$ & $F(t) = 0$: $m\ddot{x} = -Kx$ Osc. Armónico Simple
- $b \neq 0$ & $F(t) = 0$: $m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x}$ Armónico Amortiguado
- $b \neq 0$ & $F(t) \neq 0$: $m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F(t)$ Amortiguado & Forzado

- **Armónico Simple**: $m\ddot{x} = -Kx$; $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$



$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Solución General: $x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = B_1 \cos\omega t + B_2 \operatorname{sen}\omega t = A\cos(\omega t - \delta) = Re(Ce^{i\omega t})$

Energías: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} KA^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \theta)$; $F = -Kx$; $E = T + V = \frac{1}{2}KA^2$

Cinética — Potencial — Total

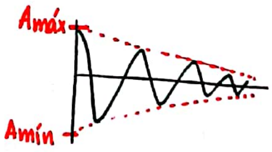
- **Armónico Amortiguado**: $m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x}$; $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$; $\gamma = \frac{b}{2m}$ Coeficiente de amortiguamiento

Solución General: $x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}\right)$

$\rightarrow \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$; $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

- **Infraamortiguado**: $\omega_0^2 > \gamma^2$

$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta)$; $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$



$A_{máx} = Ae^{-\gamma t}$

$A_{mín} = -A_{máx}$

No se conserva E por rozamiento (disipada en forma de calor)

- **Sobreamortiguado**: $\omega_0^2 < \gamma^2$

$x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t}$ $\begin{cases} \cdot \; -\gamma_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \cdot \; -\gamma_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$ $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$

Escaneado con CamScanner

· **Amortiguamiento Crítico:** $\omega_0^2 = \gamma^2$

$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$ ⟵ La que alcanza más rápidamente la posición de equilibrio sin volver a oscilar

· **Armónico Amortiguado & Forzado:** $m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$

$F_{externa}$ oscilatoria sinusoidal

Solución: $$x(t) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \; ; \quad \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Por el Boletín:

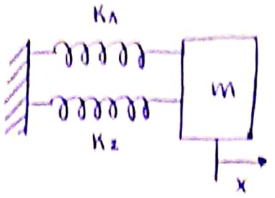
- Posición de Equilibrio ≡ Mínimo de Potencial U → $U' = 0$ & $U'' > 0$
- Potencial Armónico: $U(r) = \frac{1}{2} K (r - r_0)^2$ con $\omega^2 = K/m$
- Conservación E en caída libre: $mgh = \frac{1}{2} m v_0^2$ con $v_0 = \sqrt{2gh}$
- Pequeño Amortiguamiento ≡ Osc. Infraamortiguado (γ pequeña, $\gamma^2 < \omega_0^2$)
- En el oscilador forzado, la máxima respuesta A^2 ocurre con $\omega \simeq \omega_0$ y $\gamma \ll \omega_0$ (rozamiento pequeño) (la frecuencia de la fuerza es igual a la natural del oscilador ω_0)

  Para $\omega \simeq \omega_0 \pm \gamma$ y anchura 2γ: $A^2(\omega_0 \pm \gamma) = \frac{1}{2} A^2_{máx}$

  con $$A^2_{máx} = A^2(\omega_0) = \frac{F_0^2/m^2}{4\gamma^2\omega_0^2}$$

Osciladores Acoplados

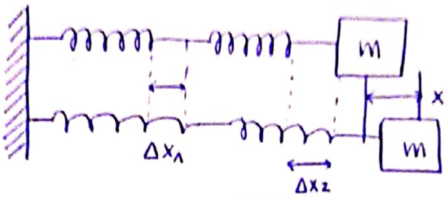
- En Paralelo:



$$\boxed{m\ddot{x} = -(K_1 + K_2)\,x = -K_{eff}\,x}$$

$K_{eff} = K_1 + K_2$ (cte recuperadora efectiva

- En Serie:



$x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$\Delta x_1 = \dfrac{K_2\, x}{K_1 + K_2}$, $\Delta x_2 = \dfrac{K_1\, x}{K_1 + K_2}$

$F_{recuperadora}$ (solo del muelle 2, que opone resistencia al mov de m)

$$\boxed{m\ddot{x} = -K_2\,\Delta x_2 = \frac{-K_2 K_1}{K_1 + K_2}\,x = -K_{eff}\,x} \quad ; \quad \frac{1}{K_{eff}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

Problemas Oscilaciones Acopladas:

1. Establecer coordenadas generalizadas, ligaduras, grados de libertad y determinar el Lagrangiano del sistema ($L = T - V$)

2. Hallar las Ecuaciones de Lagrange

3. Buscamos Solución No Trivial y a partir de ahí encontramos las frecuencias propias y modos normales del sistema

4. Suponiendo soluciones oscilatorias para las E.D resultantes en las Ecs. de Lagrange. Obtenemos la Ecuación Secular: $\boxed{|\langle A \rangle - \omega^2 \langle m \rangle| = 0}$ Así no obtenemos solución trivial

Siendo:

$$\langle m \rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonal}} \quad ; \quad \langle A \rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

y vienen de: $T = \frac{1}{2} \sum m_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k$; $V = \frac{1}{2} \sum A_{jk}\, q_k q_j$

$\hookrightarrow A_{jk} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}$

Escaneado con CamScanner

(5) Obtener la Ecuación Característica de $|\langle A\rangle - w^2\langle m\rangle| = 0$ y de ahí hallamos las frecuencias propias ($w^2 \equiv$ valores propios)

(6) Con cada w^2 obtenida, obtenemos los MODOS NORMALES de la ecuación:

$(\langle A\rangle - w^2\langle m\rangle)\cdot \vec{a} = 0 \qquad \vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\begin{pmatrix} \langle A\rangle - w^2\langle m\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (Ejemplo en 2D, aplicable a nD)

(7) El movimiento general viene dado por: $\vec{q}(t) = \vec{a}\,\eta_1 + \vec{b}\cdot\eta_2 + \dots$ depende del número de w^2

Siendo: $\eta_r = \cos(w_r t + \delta_r)$ las coordenadas normales

$\rightarrow$ se obtienen con condiciones iniciales

(En posición de equilibrio: $\dfrac{\partial V}{\partial q_j} = 0$)

Desacoplar el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = a\eta_1 + b\eta_2 \\ x_2 = a\eta_1 - b\eta_2 \end{cases}$$

Se obtiene el sistema inicial del que partimos

Coeficientes de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

- $a_n = \dfrac{2}{T}\cdot\displaystyle\int_0^T f(x)\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx$
- $b_n = \dfrac{2}{T}\cdot\displaystyle\int_0^T f(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}x\,dx$

Escaneado con CamScanner

Ondas

Solución General:

- Ecuación de Ondas en 1D: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \longrightarrow u(x,t) = \Psi(x,t) = A e^{i(\pm Kx \pm \omega t)}$

★ Criterio de Signos:

ωt:
- $+Kx$ izquierda $\longleftarrow$
- $-Kx$ derecha $\longrightarrow$

$-\omega t$:
- $+Kx$ derecha $\longrightarrow$
- $-Kx$ izquierda $\longleftarrow$

Superposición de dos ondas Ψ_1 y Ψ_2 $\longrightarrow$ $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ (onda resultante)

$K = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$; $v_f = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{K}$; $R^2 = \dfrac{B}{A}$; $P = F \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = F \cdot v$

nº onda — frecuencia — velocidad de fase — coef. de reflexión — Potencia

- ¿Estudiar onda en punto fijo? Suele escogerse $x = 0$

- Estudiar Modos Normales $\longrightarrow$ Hallar λ_n y L tal que se verifiquen las condiciones de contorno

  $n = 1 \longrightarrow$ Primer Armónico

  $n = 2 \longrightarrow$ Segundo Armónico

  ....

- Estudiar Reflexión $\longrightarrow$ Introducimos en las c.c. el cociente $R^2 = \dfrac{B}{A}$ y hallamos R (se suelen dividir las c.c. entre A y podemos despejar $\dfrac{B}{A} = R^2 \longrightarrow R = \sqrt{R^2}$)

Escaneado con CamScanner

Al hallar R:

- R = 1 Reflexión Total. Toda la onda (con su energía) se refleja. No hay onda (ni energía) transmitida.

- R < 1 Reflexión "Parcial". Parte de la onda se refleja y parte se transmite

- R = 0 "Extremo Perfecto". Toda la onda (con su energía) se transmite. No hay onda reflejada (Transmisión Total)

——— O ———

- Condiciones de Contorno:

  - Fija en un extremo (x = 0): $\Psi(x=0,t) = 0 \ \forall t$ (en superposición $\Psi(x,t) = i2A \operatorname{sen} Kx \, e^{-i\omega t}$)

  - Fija en extremos x = 0 & x = L: $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0 \ \forall t$

  - Un extremo fijo (x = 0) y otro libre (x = L): $\underbrace{\Psi(0,t) = 0}_{\text{Fijo}}$; $\underbrace{\left.\dfrac{\partial \Psi(L,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0}_{\text{Libre}}$

——— O ———

- Trabajo ejercido por unidad de tiempo ≡ Potencia : $P = F \cdot V$

  F depende de a lo que es debida la fuerza:

  (Potencia incidente) - a tensión: $F_{t,y} = T \cdot \operatorname{sen}\theta = T \tan\theta = T \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$

  - a rozamiento: Ej: $F_{roz} = \gamma v$ (Potencia disipada)

  - Para la Potencia Media $\langle P \rangle$ se promedia un período:

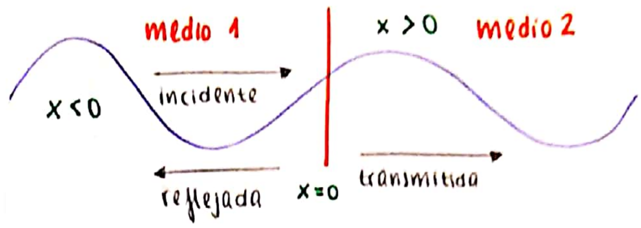
$$\langle P \rangle = \frac{\int_0^T P \, dt}{T}$$

- Ondas en 2D
  - Ecuación: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{V^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
  - Solución: $u(x,y,t) = Ae^{i(K_x x + K_y y - \omega t)} + Be^{i(K_x x - K_y y - \omega t)} + Ce^{i(-K_x x + K_y y - \omega t)} + De^{i(-K_x x - K_y y - \omega t)}$

Escaneado con CamScanner

Ondas Transmitidas & Reflejadas:

Ⓐ La onda continúa



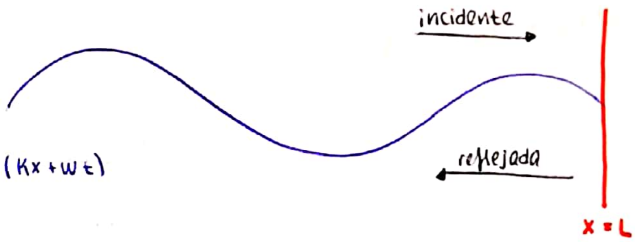
Cumplen:

$$\Psi(x,t)\big|_{x^-} = \Psi(x,t)\big|_{x^+}$$

(condición continuidad)

- $X<0$: $\Psi_1(x,t) = \underbrace{Ae^{i(Kx-wt)}}_{\text{incidente}} + \underbrace{Be^{-i(Kx+wt)}}_{\text{reflejada}}$ (suele definirse $A=1$)
- $X>0$: $\Psi_2(x,t) = \underbrace{Ce^{i(Kx-wt)}}_{\text{transmitida}}$

Ⓑ La onda se corta



$$\Psi(x,t) = Ae^{i(Kx-wt)} + Be^{-i(Kx+wt)}$$

$R = \dfrac{P_{reflejada}}{P_{incidente}}$; $T = \dfrac{P_{transmisión}}{P_{incidente}}$

Coef. de Reflexión — Coef. de Transmisión

> En la unión de 2 cuerdas no puede quedar Energía almacenada. La $E_{incidente}$ debe ser igual a la suma de las $E_{reflejada}$ y $E_{transmitida}$: $1 = R + T$ $(T=0 \leftrightarrow R=1)$ $(T=1 \leftrightarrow R=0)$

Dispersión

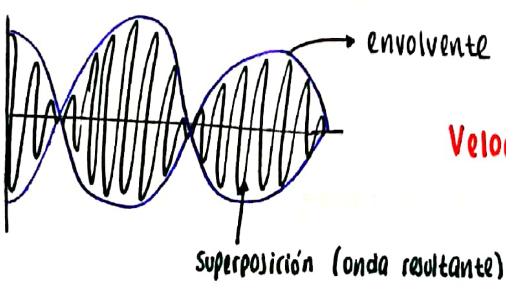
Si en una superposición de ondas, todas tienen la misma velocidad de fase (V_f), la onda resultante de la superposición tiene velocidad única ($V = V_f = w/K$)

Velocidad de fase: Velocidad de un observador que mide siempre la misma fase y amplitud

Si cada onda de la superposición tiene V_f distinta → Dispersión

V_f depende de K ($V_f = V_f(K)$), lo que deforma la superposición mientras se propaga

Así: $V_f(K) = \dfrac{w(K)}{K}$ → Relación de Dispersión $w(K)$
- Lineal. Medio NO Dispersivo
- No Lineal. Medio Dispersivo



Velocidad de Grupo: $V_g = \dfrac{dw}{dK}$ Velocidad de fase de la envolvente

Escaneado con CamScanner

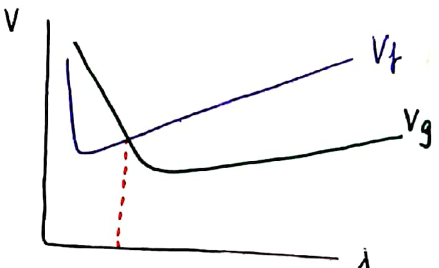
- $V_g = V_f - \lambda \cdot \dfrac{dV_f}{d\lambda}$

- $\dfrac{dV_f}{d\lambda}$
  - $= 0$ No Dispersivo $\longrightarrow$ $\boxed{V_g = V_f}$ Todas las ondas misma V_f
  - > 0 Dispersión Normal $\longrightarrow$ $\boxed{V_g < V_f}$ Mayor λ, mayor V_f
  - < 0 Dispersión Anómala $\longrightarrow$ $\boxed{V_g > V_f}$ Mayor λ, menor V_f

- Caso con Tensión Superficial: τ influye en la propagación si: factor con K < factor con τ (en rel. de dispersión $w(K)$)

- **Ejemplo de Gráfica V_f & V_g:**

Disp. Anómala ($V_g > V_f$)



Disp. Normal ($V_f > V_g$)

★ Expresiones Complejas & Trigonométricas de Utilidad

$z = x + iy = Ae^{i\varphi} \longrightarrow$
- $A = |z| \equiv$ AMPLITUD
- $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) \equiv$ FASE

; $z^* = x - iy \equiv$ Conjugado de z

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi$; $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\operatorname{sen}\varphi$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = 1$ ($|e^{\pm i\varphi}| = 1$ SIEMPRE Independientemente de φ)

En Reflexión $\left(R = \dfrac{B}{A}\right)$: si $B = -1 \longrightarrow$ Hay CAMBIO DE FASE DE π

$B = -1 = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\,\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}\pi}}_{=0} = e^{i\pi}$ ← fase

ENVOLVENTE EN ONDAS SONORAS

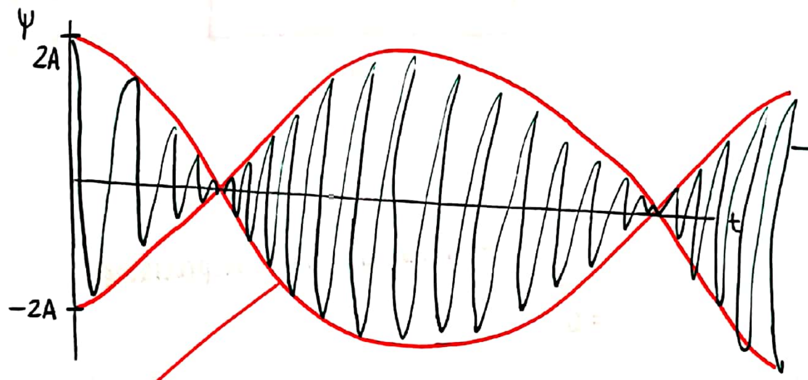
Teniendo una superposición de 2 ondas de frecuencias similares, pero no iguales (como 440 Hz y 441 Hz, ej 4.1) y de amplitudes iguales $A = A_1 = A_2$, obtenemos una onda resultante de ecuación:

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cdot \underbrace{\cos \frac{(k_1 - k_2)x + (w_1 - w_2)t}{2}}_{\text{oscilación de baja frecuencia}} \cdot \underbrace{\cos \frac{(k_1 + k_2)x + (w_1 + w_2)t}{2}}_{\text{oscilación de mayor frecuencia}}}$$

$$w = \frac{w_1 - w_2}{2} \qquad \bar{w} = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

A este fenómeno se le llama "pulsaciones" o "batidos" (beats)

Así, gráficamente:



$\rightarrow \cos \frac{(k_1+k_2)x + (w_1+w_2)t}{2}$

Envolvente ⟹ Llamamos Envolvente al producto $2A \cos \frac{(k_1 - k_2)x + (w_1 - w_2)t}{2} = 2A(t)$

Lo que se percibe es una onda de frecuencia $\frac{f_1 + f_2}{2}$, es decir, frecuencia media entre las dos de partida, "modulada" por la envolvente, de frecuencia $\frac{f_1 - f_2}{2}$.

A cada período de la envolvente, la onda Ψ presenta 2 máximos de amplitud (a cada período hay dos pulsaciones).

Afinación de un Instrumento

Superposición de onda de instrumento desafinado con la del diapasón afinado, cuya envolvente puede ser percibida por el oído humano.

Cuanto menor sea la frecuencia de la envolvente $\frac{f_1 - f_2}{2}$, mejor afinado está el instrumento.

la diferencia entre la frecuencia desafinada y la afinada ($f_1 - f_2$) es menor (= mejor afinación)

Escaneado con CamScanner

FUERZAS & C. CONTORNO

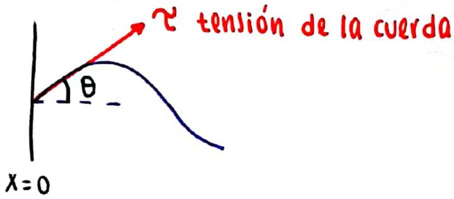
Para encontrar y demostrar las condiciones de contorno de un sistema, hay que identificar las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Al tratarse por lo general de CUERDAS, tendremos una **Tensión τ** y una masa m, normalmente despreciable ($m \longrightarrow 0$).

Descomponiendo las fuerzas y usando relaciones trigonométricas, SIEMPRE tendremos un término de la forma $\tau \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Aproximando a pequeños ángulos ($\theta << 0$): $\cos\theta \simeq 1 \rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \tan\theta$

Así:



Por la definición de derivada:

$$\boxed{\tan\theta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}}$$

$\longrightarrow$ punto donde se aplican las c.c.

Además tenemos: $F = m \cdot a = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

De esta manera:

$$F_y = \tau \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

en caso de masa despreciable

$$\hookrightarrow \quad \tau \operatorname{sen}\theta = \tau \tan\theta = \tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

Así encontramos las condiciones de contorno para poder resolver el problema

En algunos casos también tendremos fuerzas de rozamiento u otras fuerzas dependientes de la velocidad. En ese caso:

de forma $F(v) = bv = b \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$

$$F_y = \tau \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} + F_{roz.}(v) = m \cdot a_y = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\hookrightarrow \quad \tau \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} + b \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Escaneado con CamScanner

EXTRAS MCI xd

Tema 1

Fuerzas

- dependientes de x ($F(x)$): $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ $\rightarrow$ $V(x) = -\int F(x)\,dx$

  unidimensional: deriva de una función potencial

- dependientes de t ($F(t)$): usamos la 2ª Ley de Newton

  $F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $\int_0^v dv = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F\,dt$

- dependientes de v ($F(v)$): $v = \frac{dx}{dt}$ $\rightarrow$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\,dt$

Si en F tenemos una x no podemos integrar aplicando la 2ª Ley de Newton porque x depende del tiempo. Para hallar la velocidad usamos la Conservación de la Energía.

Ejemplo: $F(x) = \frac{-K}{x^2}$; $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{x}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K}{x_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{x} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K}{x_0} + \frac{K}{x}\right)\left(\frac{2}{m}\right) \Rightarrow v = \pm\sqrt{v_0 - \frac{2K}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}$$

Tema 2

- Si H se conserva pero E no, usamos H para estudiar el movimiento
- Caso Cono: Si dan la ligadura $\theta = \alpha = cte$ en el enunciado la usamos (si no la menciona usar $z = r\cdot\cos\alpha$)

  Con conos usar ESFÉRICAS

Tema 3

- Para la matriz $\langle m\rangle$: $T = \frac{1}{2}m_{11}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_{22}\dot{q}_2^2 + \underset{m_{21}}{\overset{m_{12}}{\shortparallel}}\,\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2$ $\rightarrow$ $\langle m\rangle = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$
- En el ec. secular: $|\langle A\rangle - \omega^2\langle m\rangle| = 0$ $\rightarrow$ obtenemos tantas ω como coordenadas generalizadas
- Si: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ El sistema está desacoplados (los cuerpos se moverán de forma independiente)

Escaneado con CamScanner

- Ejemplos Modos Normales:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Modo 1: $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$

Modo 2: $\eta_2 \neq 0$, $\eta_1 = 0$

1. $\left.\begin{aligned} q_1 &= a \cdot \eta_1 \\ q_2 &= a \cdot \eta_1 \end{aligned}\right\} q_1 = q_2$ Los cuerpos se mueven a la par

2. $q_1 = -q_2$ Se mueven en sentidos opuestos

- Aproximaciones para oscilaciones pequeñas
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2} \simeq 1 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) \simeq 1 - \dfrac{(\theta_1-\theta_2)^2}{2} \simeq 1 \end{cases}$$

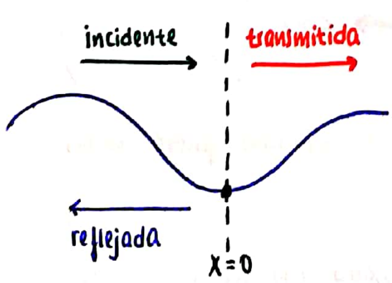
· Tema 4

- Aproximaciones para $\theta \ll 1$
$$\begin{cases} \cos\theta \simeq 1 \\ \operatorname{sen}\theta \simeq \tan\theta \end{cases}$$

- Forma de la onda
$$\begin{cases} U(x,t) = A\, e^{i(\omega t - Kx)} & \text{hacia la derecha} \\ U(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t + Kx)} & \text{hacia la izquierda} \end{cases}$$


- Caso ondas separadas entre dos medios:

· Onda Continua:



$x<0$: $U(x,t) = \underset{\substack{\text{amplitud incidente} \\ (=1)}}{A}\, e^{i(\omega t - Kx)} + \underset{\text{amplitud reflejada}}{B}\, e^{i(\omega t + Kx)}$

$x>0$: $U(x,t) = \underset{\text{amplitud transmitida}}{T} \cdot e^{i(\omega t - Kx)}$

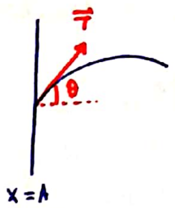
$x=0$: $U(x,t)\Big|_{x=0^-} = U(x,t)\Big|_{x=0^+}$ (Condición de continuidad)

(Si no la cumple: )

- Condiciones de Contorno:

Cada extremo fijo cumple: $u(x = \text{punto fijo}, t) = 0$

Aplicando la <u>2ª Ley de Newton</u>:



$F_y = T \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot a \Rightarrow T \cdot \tan\theta = m \cdot a = 0$ si es masa despreciable $(m = 0)$

$$T \cdot \tan\theta = m \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{= a} \quad \left(\text{en casos con } V: \; V = \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Usando la definición de derivada: $\tan\theta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A}$

Tenemos: $$T \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A} = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ Condición de contorno (derivamos u y sustituimos)

- Reflectividad:

  - <u>Ondas separadas (cortadas)</u> $\Rightarrow$ $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$
    - $R = \pm 1$: REFLEXIÓN TOTAL $\rightarrow$ Se forman ondas estacionarias

      Se conserva la energía (toda la energía que incide, se refleja)

      $P_{incidente} = 0$; $P_{disipada} = 1$
    - $R < 1$: Energía perdida por rozamiento
    - $R = 0$: No hay reflexión, toda la onda se transmite

      $P_{incidente} = P_{disipada}$

  - <u>Ondas continuas</u> $\Rightarrow$ Se despeja B para $x<0$: $u(x,t) = e^{i(\omega t - Kx)} + B\, e^{i(\omega t + Kx)}$

- Modos Normales:

Al desenvolver las c.c. podemos obtener cosenos y senos tal que:

$$e^{iKx} + e^{-iKx} = 2 \cdot \cos(Kx) \;;\; e^{iKx} - e^{-iKx} = 2i \cdot \text{sen}(Kx) \;;\; e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \cdot \text{sen}\,\omega t$$

Despejamos K de $\cos(Kx)$ ó $\text{sen}(Kx)$ y usamos: $K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$ Obtenemos λ_n y estudiamos el caso de diferentes $n = 1, 2, 3 \ldots$

Escaneado con CamScanner

- Además: $v = \frac{w_n}{K_n}$; $K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $w = \frac{2\pi}{T}$; $\lambda = \frac{v}{f}$; $f = \frac{1}{T}$; Potencia $\equiv P = \left.\frac{\vec{F}\cdot dr}{dt}\right|_x = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\Big|_x$

(Si obtenemos seno / coseno:

$\langle P \rangle =$ ____ $\langle \text{sen}\, wt \rangle$

$\langle \text{sen}\, wt \rangle = \frac{\int \text{sen}\, wt}{T}$)

- $\boxed{V_{fase} = \frac{w}{K} \;;\; V_{grupo} = \frac{dw}{dK}}$

$\rightarrow$ Dispersión: $\frac{dV_f}{d\lambda}$

- >0: Dispersión Normal $\Rightarrow V_f > V_g$
  Las ondas de mayor λ van a mayor V_f
- $=0$: Medio NO Dispersivo $\Rightarrow V_f = V_g$
- <0: Dispersión Anómala $\Rightarrow V_f < V_g$
  Las ondas de mayor λ van a menor V_f

(Si la relación $w(K)$ NO es lineal es un medio dispersivo)

Escaneado con CamScanner